©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

# Über die Satellitcurven und Satellitflächen.

Von Dr. **Gustav Kohn** in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. December 1883.)

Die Berührungspunkte der $n(n-1)$ von einem beliebigen Punkte $o$ der Ebene an eine Plancurve $C_n$ $n$-ter Ordnung gehenden Tangenten werden aus dieser Curve durch die erste Polare des Punktes $o$ ausgeschnitten. Salmon[1] hat nun eine Curve $(n-1)$. $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung angegeben, welche die übrigen $n(n-1)$. $(n-2)$ Schnittpunkte dieser Tangenten aus der Curve $C_n$ ausschneidet und Cremona,[2] der jene Curve für den Fall $n = 3$ näher betrachtet hat, hat ihr den Namen Satellitcurve (curva satellite) beigelegt.

Im ersten Theile dieser Abhandlung wird eine geometrische Erzeugung dieser Satellitcurven gegeben, und es werden aus der Erzeugung durch geometrische Betrachtungen mehrere neue Eigenschaften der Satellitcurven, insbesondere die Zahl und Lage ihrer singulären Punkte, erschlossen.

Der zweite Theil enthält die analogen Untersuchungen für Flächen.[3]

## I.

Es sei eine beliebige Plancurve $n^{\text{ter}}$ Ordnung $C_n$ und ein willkürlicher, ausserhalb derselben gelegener Punkt $o$ ihrer Ebene vorgelegt. Eine beliebig durch $o$ hindurchgelegte Transversale $T$ schneidet $C_n$ in $n$ Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Auf der Geraden $T$ ist nun eine Involution $J_n^1$ bestimmt, nämlich durch das Punktsystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als eine, den $n$-fachen Punkt $o$ als zweite Gruppe. Diese Involution besitzt $n-1$ im Allgemeinen verschiedene singu-

---

[1] Salmon-Fiedler, Höhere Curven, Art. 78 und 79.

[2] Cremona, Ebene Curven, pag. 223 der deutschen Ausgabe.

[3] Die Satellitfläche eines Punktes in Bezug auf eine Fundamentalfläche dritter Ordnung ist schon von Herrn Sturm (Journ. f. Math. Bd. 88) geometrisch untersucht worden.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at


läre Gruppen, welche Doppelelemente enthalten, und diese Doppelelemente sind nichts Anderes als die harmonischen Mittelpunkte $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ des Pols $o$ in Bezug auf das Punktsystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$. (Siehe Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss., Juliheft 1883.)

Lässt man die Transversale $T$ um den Punkt $o$ rotiren und verzeichnet auf derselben stets die $n-1$ singulären Gruppen der Involution $J_n^1$, so erhält man eine Curve, von der die doppelt gezählte erste Polare ein Bestandtheil ist. Der andere Bestandtheil der erzeugten Curve, der von den $(n-1)(n-2)$ Punkten beschrieben wird, welche die doppelt gezählten, harmonischen Mittelpunkte $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ zu Gruppen der Involution $J_n^1$ ergänzen, soll die Satellitcurve des Pols $o$ bezüglich der Curve $C_n$ genannt werden.

Wir stellen zunächst einige Sätze zusammen, welche sich sofort aus dieser Erzeugung ergeben:

1. Bei einer collinearen Transformation der Ebene, wird die Satellitcurve des Punktes $o$ bezüglich der Curve $C_n$ übergeführt in die Satellitcurve des entsprechenden Punktes für die entsprechende Curve.

Dies ist eine unmittelbare Folge des projectiven Charakters der oben für die Satellitcurve gegebenen Construction.

2. Die Ordnung der Satellitcurve ist $(n-1)(n-2)$.

Es genügt nachzuweisen, dass jede durch $o$ hindurchgelegte Gerade die Satellitcurve in $(n-1)(n-2)$ Punkten schneidet. Wir haben aber der obigen Erzeugung zufolge auf einer beliebig durch $o$ gelegten Transversale $T$ $(n-1)(n-2)$ Punkte zu verzeichnen und dies werden die sämmtlichen Schnittpunkte der Geraden $T$ mit der Satellitcurve sein. Es kann nämlich nicht geschehen, dass von den auf einer andern durch $o$ gehenden Transversale $T'$ zu construirenden $(n-1)(n-2)$ Punkten einer auf die Gerade $T$ fällt. Denn würde einer dieser Punkte in den Punkt $o$ hineinfallen, so müsste diejenige Gruppe der auf $T'$ bestimmten Involution $J_n^1$, welcher der Punkt $o$ angehört, ein seinguläre sein. Diese Gruppe ist aber der Definition von $J_n^1$ zufolge der $n$-fache Punkt $o$ selbst, so dass eine ganze singuläre Gruppe, also auch ein Punkt seiner ersten Polare in den Punkt $o$ hineinfallen würde. Dies findet aber bekanntlich nur statt, wenn der Punkt $o$ auf der Grundcurve liegt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

3. Die vom Punkte $o$ aus an die Grundcurve $C_n$ gehenden $n(n-1)$ Tangenten berühren diese Curve in ihren Schnittpunkten mit der ersten Polare dieses Punktes und schneiden dieselbe in weiteren $n(n-1).(n-2)$ Punkten, den Schnittpunkten von $C_n$ mit der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ des Punktes $o$.

Jede von $o$ aus an die Curve $C_n$ gelegte Tangente $T$ schneidet diese Curve nämlich in einem Punktsystem, welches der Definition zufolge eine singuläre Gruppe der auf $T$ bestimmten Involution $J_n^1$ darstellt.

4. Alle Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche für den Pol $o$ dieselbe erste Polare haben, haben für diesen Pol auch dieselbe Satellitcurve.

Jede Curve, welche für den Pol $o$ dieselbe erste Polare hat wie $C_n$, muss von jeder durch $o$ hinterlegten Transversale $T$ in den Punkten einer Gruppe der auf dieser Transversale bestimmten Involution $J_n^1$ getroffen werden. Denn die Gruppen von $J_n^1$ bilden die Gesammtheit jener Punktsysteme auf der Transversale $T$, welche für den Pol $o$ dieselben harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n-1$ haben, wie das System der Schnittpunkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit der Grundcurve $C_n$. Wenn man also die Curve $C_n$ durch irgend eine andere ersetzt, welche für den Pol $o$ dieselbe erste Polare hat, so wird man auf jeder Transversale $T$ dieselbe Involution $J_n^1$ erhalten und es werden also auch deren singuläre Gruppen dieselben bleiben.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Schnittpunkte der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ mit einer beliebigen, nicht durch $o$ gehenden Geraden $G$ der Ebene.

Zu diesem Zwecke denken wir uns auf jeder, durch den Punkt $o$ hindurchgelegten Transversale $T$ die $n-1$ Punkte construirt, welche ihren Schnittpunkt mit der Geraden $G$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^1$ ergänzen. Als Ort dieser $n-1$ Punkte werden wir eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erhalten, welche wir die der Geraden $G$ bezüglich des Pols $o$ zugeordnete Curve nennen und mit $C^{n-1}(o, G)$ bezeichnen wollen. Dass diese Curve von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, folgt daraus, dass vermöge ihrer Construction jede durch $o$ hindurchgelegte Gerade sie in $n-1$ Punkten trifft und für keine Lage dieser Geraden einer der $n-1$ Punkte

nach $o$ rückt, indem sonst zwei Gruppen der Involution $J_n^1$ auf einer solchen Geraden, nämlich der $n$-fache Punkt $o$ und die Gruppe, welcher der Schnittpunkt mit der Geraden $G$ angehört, den Punkt $o$ gemein hätten. Dann müsste aber dieser Punkt allen Gruppen der Involution angehören, was für die Gruppe der Schnittpunkte mit der Curve $C_n$ nicht zutrifft.

Aus der Construction der Curve $C^{n-1}(o, G)$ ist sofort ersichtlich, dass die von $o$ aus an diese Curve gehenden Tangenten die Gerade $G$ in den Punkten treffen, in welchen dieselbe von der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ getroffen wird. Denn es tritt für jede solche Tangente und nur für eine solche der Fall ein, dass die Gruppe der auf derselben bestimmten Involution $J_n^1$, welcher der Schnittpunkt $a$ dieser Tangente mit der Geraden $G$ angehört, ein von $a$ verschiedenes Doppelelement besitzt. Wir finden also:

5. Man erhält die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $G$ mit der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$, indem man diese Gerade mit den $(n-1)(n-2)$ Tangenten zum Durchschnitte bringt, welche vom Punkte $o$ aus an die der Geraden $G$ zugeordnete Curve $C^{n-1}(o, G)$ gelegt werden können.

Dies zieht eine besondere Beschaffenheit einer geraden Gruppe der Satellitcurve nach sich:

6. Die $(n-1)(n-2)$ Schnittpunkte der Satellitcurve mit einer beliebigen Geraden werden von jedem Punkte der Ebene aus durch die $(n-1)(n-2)$ Tangenten einer Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung projicirt.

Eigentlich haben wir diese Eigenschaft nur für die von $o$ ausgehenden Strahlen bewiesen, allein da diese Eigenschaft durch projective Transformation des Strahlenbüschels nicht zerstört wird, so gilt der Satz auch für jeden andern Punkt der Ebene.

Die der Geraden $G$ zugeordnete Curve kann man auch leicht unabhängig von der Involution $J_n^1$ definiren.

Ist $a$ ein Schnittpunkt der Geraden $G$ mit der Grundcurve $C_n$, so werden die $n-1$ übrigen Punkte, in welchen die Transversale $oa$ die Curve $C_n$ noch trifft, auf $C^{n-1}(o, G)$ liegen, da diese Punkte den Punkt $a$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^1$ auf $oa$ ergänzen. Wir finden:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die der Geraden $G$ bezüglich des Pols $o$ zugeordnete Curve $C^{n-1}(o, G)$ ist jene Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus der Fundamentalcurve $C_n$ die $n(n-1)$ Punkte ausschneidet, in welchen die von $o$ aus zu den Schnittpunkten der Geraden $G$ mit $C_n$ gehenden Strahlen diese Curve noch treffen.

Ausserdem werden wir später noch von der Eigenschaft Gebrauch machen, dass die Curve $C^{n-1}(o, G)$ mit der Geraden $G$ zusammen eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung bildet, welche für den Pol $o$ dieselbe erste Polare hat wie die Fundamentalcurve $C_n$. Dies folgt daraus, dass $C^{n-1}(o, G)$ mit $G$ zusammen, jede durch $o$ hindurchgehende Transversale in einer Gruppe der auf dieser Transversale bestimmten Involution $J_n^1$ schneidet.

Durch den Satz (5) ist die Frage nach jenen Geraden $G$ der Ebene, welche nicht durch $o$ gehen und die Satellitcurve in zwei zusammenfallenden Punkten treffen, zurückgeführt auf die Frage nach denjenigen Curven $C^{n-1}(o, G)$, für welche zwei der $(n-1).(n-2)$ von $o$ aus an eine solche Curve gehenden Tangenten zusammenfallen. Da keine Curve $C^{n-1}(o, G)$, wie oben gezeigt wurde, durch $o$ geht, so tritt dieser Fall nur dann ein, wenn $C^{n-1}(o, G)$ entweder 1. eine Wendetangente, oder 2. eine Doppeltangente durch $o$ schickt, oder 3. wenn diese Curve einen Doppelpunkt besitzt.

Es ist leicht zu sehen, dass es der letzte dieser drei Fälle ist, welcher die Tangenten der Satellitcurve liefert. Denn ist $a$ ein beliebiger Punkt der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ und zieht man den Strahl $oa$, so wird die singuläre Gruppe der Involution $J_n^1$ auf diesem Strahle, welcher der Punkt $a$ angehört, wohl ein Doppelelement $d$, aber weder ein dreifaches Element, noch zwei Doppelelemente enthalten, weil ja $oa$ ein ganz beliebiger, durch o hindurchgehender Strahl ist. Lässt man eine Gerade $G$ um den Punkt $a$ rotiren, so wird die ihr zugeordnete Curve $C^{n-1}(o, G)$ in Folge der dieselbe definirenden Erzeugungsart den Strahl $oa$ stets in denselben $n-1$ Punkten schneiden, von denen nur ein einziges Paar zusammenfällt und zwar im Punkte $d$. Es wird demnach der Strahl $oa$ für keine Curve $C^{n-1}(o, G)$, welche einer durch $a$ gehenden Geraden $G$ zugeordnet ist, eine Doppel- oder Wendetangente sein. Da aber zwei der $(n-1)(n-2)$ vom Punkte $o$ aus

an die Curve $C^{n-1}(o, G)$ gehenden Tangenten mit dem Strahl $oa$ zusammenfallen müssen, sobald $G$ die Tangente der Satellitcurve im Punkte $a$ ist, so kann dies nur dadurch geschehen, dass die Curve $C^{n-1}(o, G)$ im Punkte $d$ einen Doppelpunkt hat.

Wir haben das Resultat:

7. Die Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ für den Pol $o$ ist die Enveloppe derjenigen Geraden $G$, deren bezüglich des Punktes o zugeordnete Curven $C^{n-1}(o, G)$ einen Doppelpunkt besitzen.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung des Falles über, wo die der Geraden $G$ zugeordnete Curve $C^{n-1}(o, G)$ eine Wendetangente $W$ durch den Punkt $o$ schickt. Dies zieht, wie schon oben gezeigt, eine besondere Lage für die Gerade $W$ nach sich. Es enthält nämlich die Involution $J_n^1$ auf einer solchen durch $o$ gehenden Geraden eine Gruppe mit einem dreifachen Element, so dass die Gerade $W$ eine der $(n-1)(n-2)$ Tangenten sein muss, welche von $o$ aus an die erste Polaren dieses Punktes bezüglich der Curve $C_n$ gelegt werden können. Denn in ein dreifaches Element der Involution $J_n^1$ fallen zwei Doppelelemente dieser Involution, also zwei Schnittpunkte der Geraden $W$ mit der ersten Polare. Umgekehrt hat die Involution $J_n^1$ auf jeder durch $o$ gehenden Tangente der ersten Polare ein dreifaches Element, weil zwei Doppelelemente dieser Involution im Berührungspunkte zusammenfallen. Wir wollen den Schnittpunkt der von $o$ aus an die Curve $C^{n-1}(o, G)$ gehenden Wendetangente $W$ mit der Geraden $G$ mit $a$ bezeichnen und der Berührungspunkt von $W$ mit der Curve mag $w$ heissen, so dass also die Involution $J_n^1$ auf der Geraden $W$ eine Gruppe besitzt, der $a$ als einfaches, $w$ als dreifaches Element angehört. Demzufolge wird auch jeder andern beliebig durch $a$ gelegten Geraden $G'$ eine Curve $C^{n-1}(o, G')$ zugeordnet sein, für welche $W$ eine Wendetangente, $w$ deren Berührungspunkt ist, da die Curven $C^{n-1}(o, G)$ und $C^{n-1}(o, G')$ vermöge ihrer Erzeugungsart die Gerade $W$ in denselben Punkten treffen. Es fallen also auch zwei Schnittpunkte der ganz beliebig durch $a$ gelegten Geraden $G'$ mit der Satellitcurve in diesen Punkt hinein, da die Wendetangente $W$ zwei von den $(n-1)(n-2)$ von $o$ aus an die Curve $C^{n-1}(o, G')$ gehenden Tangenten absorbirt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Um nun zu entscheiden, ob der Punkt $a$ für die Satellitcurve ein Doppelpunkt oder eine Spitze ist, werden wir jene durch den Punkt $a$ gehenden Geraden zu untersuchen haben, welche in $a$ drei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Satellitcurve gemein haben.

Wir werden also nach solchen durch den Punkt $a$ gehenden Geraden zu fragen haben, denen eine Curve zugeordnet ist, für welche drei von den $(n-1)(n-2)$ an sie gehenden Tangenten mit dem Strahle $oa$ zusammenfallen. Ist $G_1$ eine solche durch $a$ gehende Gerade, so wird die Curve $C^{n-1}(o, G_1)$ im Allgemeinen einen Doppelpunkt im Punkte $w$ haben und $oa$ wird eine Doppelpunktstangente sein. Weil nämlich von den Schnittpunkten der Curve $C^{n-1}(o, G_1)$ mit dem Strahle $W$ drei im Punkte $w$ zusammenfallen, die übrigen aber getrennt liegen, so kann die Gerade $W$ nur dann mehr als zwei Tangenten an die Curve $C^{n-1}(o, G_1)$ absorbiren, wenn auf dieser Geraden ein vielfacher Punkt der Curve liegt, d. h. wenn der Punkt $w$ entweder ein Doppelpunkt oder eine Spitze oder ein dreifacher Punkt der Curve ist. Dass der erste dieser drei Fälle im Allgemeinen eintritt, wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass er überhaupt eintreten kann; denn es kann der Doppelpunkt nicht als Specialfall einer Spitze oder eines dreifachen Punktes angesehen werden. Es ist aber klar, dass wir den ersten Fall vor uns haben, wenn wir als Grundcurve $C_n$ die Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung zu Grunde legen, welche sich aus einer Geraden und einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem Doppelpunkte zusammensetzt, und wenn wir den Punkt $o$ auf einer der beiden Doppelpunktstangenten annehmen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass es nur eine einzige durch $a$ gehende Gerade $G_1$ geben kann, welcher eine Curve $C^{n-1}(o, G_1)$ zugeordnet ist, die im Punkte $w$ einen Doppelpunkt hat. Angenommen, es sei $G_2$ eine zweite solche Gerade, so haben wir jetzt zwei Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung, nämlich eine aus $G_1$ und $C^{n-1}(o, G_1)$ zusammengesetzte und eine zweite aus $G_2$ und $C^{n-1}(o, G_2)$ bestehende, welche auf jeder durch $o$ hindurchgelegten Transversale je eine Gruppe der auf derselben bestimmten Involution $J_n^1$ ausschneiden und überdies beide im Punkte $w$ einen Doppelpunkt besitzen. Durch diese beiden Curven ist also ein Büschel von Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmt, welche auf jeder durch $o$ gelegten Transversale die Gruppen der auf derselben bestimmten Involution

$J_n^1$ ausschneiden und welche sämmtlich im Punkte $w$ einen Doppelpunkt haben. Diejenige Curve dieses Büschels, welche durch den Punkt $o$ hindurchgeht, muss also in diesem Punkte einen $n$-fachen Punkt und ausserdem in $w$ einen Doppelpunkt besitzen, d. h. es muss diese Curve aus $n$ durch $o$ gehenden Geraden bestehen, von denen zwei mit dem Strahl $W$ zusammenfallen. Es müssten daher alle Punkte, in denen die doppelt gelegte Gerade $W$ die eine der das Curvenbüschel definirenden Curven trifft, auf der zweiten liegen und es müsste also speciell die aus $G_2$ und $C^{n-1}(o, G_2)$ gebildete Curve die Gerade $G_1$ in ihrem Schnittpunkte $a$ mit $W$ in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden.

Da aber die Curve $C^{n-1}(o, G_2)$ nicht durch den Punkt $a$ hindurchgeht (sonst wäre ja $a$ ein Doppelelement der Involution $J_n^1$ auf $W$), so müsste $G_2$ mit $G_1$ im Punkte $a$ zwei unendlich nahe Punkte gemein haben, was nicht angeht, ohne dass die beiden Geraden zusammenfallen.[1]

Es gibt somit nicht mehr als eine durch $a$ gehende Gerade $G_1$, welche die Satellitcurve in drei mit $a$ zusammenfallenden Punkten schneidet; der Punkt $a$ ist daher ein Rückkehrpunkt für die Satellitcurve.

Da der Punkt $a$ ein beliebiger Punkt derjenigen Gruppe Involution $J_n^1$ auf einer der $(n-1)(n-2)$ von $o$ an die erste Polare dieses Punktes bezüglich der Grundcurve $C_n$ gehenden Tangenten ist, welcher der Berührungspunkt dieser Tangente als dreifaches Element angehört, so haben wir das Resultat:

8. Die Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ des Pols $o$ bezüglich einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung $C_n$ besitzt $(n-1)(n-2).(n-3)$ Spitzen, welche zu je $n-3$ auf den $(n-1)(n-2)$ Tangenten liegen, die vom Punkte $o$ aus an die erste Polare dieses Punktes in Bezug auf die Curve $C_n$ gelegt werden können.

Es erübrigt jetzt noch, den Fall zu betrachten, dass an die der Geraden $G$ zugeordnete Curve $C^{n-1}(o, G)$ eine Doppeltangente $D$ gelegt werden kann. Wir wollen den Schnittpunkt von $D$ mit der

[1] Durch diese Betrachtung wird ganz allgemein nachgewiesen, dass, wenn sich die Gerade $G$ um einen Punkt $a$ der Satellitcurve dreht, nicht mehr als eine von den ihr zugeordneten Curven in demselben von $a$ verschiedenen Punkte der Geraden $\overline{oa}$ einen Doppelpunkt hat.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Geraden $G$ mit $a$, die beiden Berührungspunkte mit der Curve $C^{n-1}(o,G)$ mit $d_1$ und $d_2$ bezeichnen. Die Involution $J_n^1$ auf $D$ hat den besonderen Charakter, dass sie eine Gruppe mit zwei Doppelelementen $d_1$ und $d_2$ enthält und $a$ ist ein einfacher Punkt dieser singulären Gruppe. Einer beliebigen andern, durch $a$ gelegten Geraden $G'$ wird eine Curve $C^{n-1}(o,G')$ zugeordnet sein, für die $D$ ebenfalls eine Doppeltangente ist, denn ihre Schnittpunkte mit $D$ sind dieselben, wie die von $C^{n-1}(o,G)$, nämlich die Punkte, welche $a$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^1$ auf $D$ ergänzen. Wir schliessen daraus, dass für jede durch $a$ hindurchgelegte Gerade zwei Schnittpunkte mit der Satellitcurve in den Punkt $a$ fallen, indem von den an die der Geraden zugeordnete Curve von $o$ ausgehenden Tangenten zwei mit $D$ zusammenfallen. Wenn wir noch zeigen können, dass durch den Punkt $a$ zwei (im Allgemeinen) verschiedene Gerade $G_1$ und $G_2$ gelegt werden können, welche mit der Satellitcurve drei in $a$ zusammenfallende Punkte gemein haben, so wird gezeigt sein, dass der Punkt $a$ ein Doppelpunkt der Satellitcurve ist. Es sei $G_1$ eine solche Gerade, so wird der Strahl $D$ drei Tangenten der von $o$ aus an die Curve $C^{n-1}(o,G_1)$ gehenden $(n-1)(n-2)$ Tangenten absorbiren. Da die Schnittpunkte von $C^{n-1}(o,G_1)$ mit $D$ nichts Anderes sind als jene $n-1$ Punkte, welche den Punkt $a$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^1$ auf $D$ ergänzen, so dass von diesen Punkten je zwei in $d_1$ und $d_2$ vereinigt, während die übrigen $n-5$ getrennt liegen, so kann nur, wenn $C^{n-1}(o,G_1)$ in einem der Punkte $d_1$ oder $d_2$ einen Doppelpunkt (Spitze) hat, die Tangente $D$ mehr als zwei der von $o$ ausgehenden Tangenten absorbiren. Es ist leicht einzusehen, dass es im Allgemeinen nicht geschehen wird, dass die Curve $C^{n-1}(o,G_1)$ weder gleichzeitig in $d_1$ und $d_2$ einen Doppelpunkt, noch in einem dieser Punkte eine Spitze hat. Wir brauchen dazu nur zu zeigen, dass der Fall, dass $C^{n-1}(o,G_1)$ blos einen Doppelpunkt hat, überhaupt eintreten kann, denn dieser Fall kann nicht als Specialfall der beiden andern auftreten.

Wir haben aber diesen Fall offenbar vor uns, wenn wir als Grundcurve $C_n$ eine Curve nehmen, die sich aus der Geraden $G_1$ und einer Curve $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung zusammensetzt, die einen Doppelpunkt $d_1$ besitzt, falls der Punkt $o$ auf einer vom Doppelpunkte an diese Curve gelegten Tangente angenommen wird.

Es wird also im Allgemeinen die der Geraden $G_1$ zugeordnete Curve $C^{n-1}(o, G_1)$ nur einen Doppelpunkt $d_1$ besitzen und da $d_1$ nichts vor dem Punkte $d_2$ voraus hat, so wird es im Allgemeinen eine zweite durch $a$ gehende Gerade $G_2$ geben, der eine Curve $C^{n-1}(o, G_2)$ mit einem Doppelpunkte in $d_2$ zugeordnet ist.

Unsere Betrachtung gilt für jeden Punkt $a$, welcher in der auf $oa$ bestimmten Involution $J_n^1$ als einfaches Element einer Gruppe auftritt, welche zwei Doppelelemente enthält; jeder solche Punkt $a$ ist ein Doppelpunkt für die Satellitcurve.

Um die Zahl dieser Doppelpunkte zu finden, werden wir also blos die Anzahl der durch $o$ gehenden Strahlen $D$ zu bestimmen haben, auf welchen die Involution $J_n^1$ eine Gruppe mit zwei Doppelelementen besitzt. Diese beiden Doppelelemente auf jeder solchen Geraden $D$ liegen auf der ersten Polare $P_{n-1}$ des Punktes $o$ und wir wollen im Folgenden eine Curve construiren, welche diese Doppelelementenpaare aus der Polare $P_{n-1}$ ausschneidet.

Auf jeder durch $o$ hindurchgelegten Transversale $T$ ist eine Involution zweiter Stufe $J_n^2$ bestimmt, welcher die Gruppen der Involution erster Stufe $J_n^1$ angehören. Die Involution $J_n^2$ ist gegeben dadurch, dass ihr erstens das System der Schnittpunkte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Transversale $T$ mit der Grundcurve $C_n$ als Gruppe angehören und dass sie zweitens die Involution erster Stufe enthalten soll, deren Gruppen aus dem $(n-1)$-fachen Punkte $o$ in Verbindung mit einem beliebigen Punkte von $T$ bestehen.

Die Involution $J_n^2$ besitzt singuläre Gruppen von zweierlei Art, nämlich Gruppen, welche ein dreifaches Element $w$ und Gruppen, welche zwei verschiedene Doppelelemente $d_1$ und $d_2$ enthalten. Die dreifachen Elemente $w$ sind nichts Anderes als die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades für den Pol $o$ bezüglich des Punktsystems $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (cf. Sitzber. d. k. Ak. d. Wiss. a. a. O.) und werden, wenn man die Gerade $T$ um den Punkt $o$ rotiren lässt, die zweite Polare dieses Punktes bezüglich der Curve $C_n$ erfüllen. Die Punktepaare $d_1, d_2$ auf $T$ werden bei der Rotation dieser Transversale eine Curve $N$ beschreiben, mit welcher wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Die Schnittpunkte der Curve $N$ mit einer beliebigen Geraden $G$ bestimmen wir in ganz ähnlicher Weise, wie wir dies für die Satellitcurve gethan haben. Wir verzeichnen auf jeder durch $o$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gehenden Transversale $T$ die $n-2$ Punkte, welche den doppelten Schnittpunkt $a$ von $T$ und $G$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^2$ auf $T$ ergänzen. Der Ort dieser n−2 Punkte ist eine Curve, die wir mit $C^{n-2}(o, G^2)$ bezeichnen wollen. Aus dieser Erzeugungsart geht hervor, dass die von $o$ aus an die Curve $C^{n-2}(o, G^2)$ gehenden Tangenten die Gerade $G$ in ihren Schnittpunkten mit der Curve $N$ treffen.

Da die Systeme von je $n-1$ Punkten, welche den einfachen Punkt $a$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^2$ auf $T$ ergänzen, wieder eine Involution erster Stufe $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $(J)_{n-1}^1$ bilden, so kann die Curve $C^{n-2}(o, G^2)$ auch als Ort der $n-2$ Punkte angesehen werden, welche den einfachen Punkt $a$ der beweglichen Transversale $T$ zu einer Gruppe der Involution $(J)_{n-1}^1$ ergänzen. Von der Involution $(J)_{n-1}^1$ können wir aber zwei Gruppen angeben, welche sie bestimmen, nämlich den $(n-1)$-fachen Punkt $o$ und die Gruppe der $n-1$ Schnittpunkte von $T$ mit der Curve $C^{n-1}(o, G)$, denn jedes dieser Punktsysteme bildet mit dem Punkt $a$ zusammen eine Gruppe der Involution $J_n^2$. Für beide Systeme folgt dies unmittelbar aus der Definition von $J_n^2$.

Damit ist aber eine Erzeugung der Curve $C^{n-2}(o, G^2)$ gegeben, welche zeigt, dass diese Curve nichts Anderes ist als die der Geraden $G$ für den Pol $o$ zugeordnete Curve, wenn $C^{n-1}(o, G)$ als Fundamentalcurve betrachtet wird.

Die Curve $C^{n-2}(o, G^2)$ ist also von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung; es gehen demnach $(n-2)(n-3)$ Tangenten von $o$ aus an dieselbe, und da diese Tangenten auf der Geraden $G$ deren Schnittpunkte mit der Curve $N$ bestimmen, so ist die Ordnung der Curve $N$ gleich $(n-2)(n-3)$.

Wir wollen jetzt die Schnittpunkte dieser Curve $N_{(n-1)(n-3)}$ mit der ersten Polare $P_{n-1}$ des Punktes $o$ untersuchen.

Ist $d_1$ ein solcher Schnittpunkt, so soll gezeigt werden, dass die Involution $J_n^1$ auf der Geraden $o d_1$ eine Gruppe mit zwei Doppelelementen besitzt, von denen $d_1$ eines ist. In der That muss der Punkt $d_1$ einerseits als Punkt von $P_{n-1}$ ein Doppelelement für eine Gruppe der Involution $J_n^1$ sein, anderseits muss $d_1$ als Punkt von $N_{(n-1)(n-3)}$ einer Gruppe der Involution $J_n^2$ auf $o d_1$ angehören, welche noch ein zweites Doppelelement $d_2$ besitzt. Diese beiden Gruppen werden aber identisch sein müssen, da die

Involution $J_n^1$ in der Involution $J_n^2$ enthalten ist, und eine Gruppe dieser zweiten Involution durch Annahme zweier Elemente vollständig individualisirt ist. ($J_n^2$ kann nämlich kein neutrales Elementenpaar besitzen, da der $(n-1)$-fache Punkt $o$ mit jedem Punkte von $o\,d_1$ eine Gruppe dieser Involution bildet.) Es wird also die Gerade $o\,d_1$ eine solche Gerade sein, für welche die Involution $J_n^1$ eine Gruppe mit zwei verschiedenen Doppelelementen enthält, also eine von den Geraden $D$, deren Zahl zu bestimmen wir uns zur Aufgabe gemacht haben.

Wir finden, dass sich die Schnittpunkte der Curven $P_{n-1}$ und $N_{(n-2)(n-3)}$ in Punktepaare $d_1$, $d_2$ ordnen, deren Verbindungslinie $D$ durch $o$ läuft und aus der Definition dieser Curven ist klar, dass umgekehrt auch alle solche Punktepaare beiden Curven angehören.

Wenn wir noch zeigen können, dass ein Schnittpunkt von $P_{n-1}$ mit $N_{(n-2)(n-3)}$ für beide Curven im Allgemeinen ein einfacher Punkt ist und dass die Tangenten beider Curven in demselben von einander verschieden sind, so wird gezeigt sein, dass die $(n-1)(n-2)(n-3)$-Schnittpunkte dieser beiden Curven im Allgemeinen getrennt liegen und dass die gesuchte Zahl der Geraden $D$ gleich $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$ ist.

Um nun einzusehen, dass diese Voraussetzungen im Allgemeinen erfüllt sind, braucht man nur zu beachten, dass die Curve $N_{(n-2)(n-3)}$ vermöge der sie definirenden Erzeugungsart unverändert bleibt, wenn man die Grundcurve $C_n$ durch irgend eine andere Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung ersetzt, welche für den Pol $o$ dieselbe zweite Polare $P_{n-2}$ hat, wie $C_n$. (Die Involution $J_n^2$ auf einer jeden Transversale $T$ bleibt nämlich dabei ungeändert.) Die Schnittpunkte der Curve $N_{(n-1)(n-2)}$ mit der ersten Polare $P_{n-1}$ haben daher nichts voraus vor den Schnittpunkten von $N_{(n-1)(n-2)}$ mit jeder andern Curve $P'_{n-1}$, in Bezug auf welche der Punkt $o$ dieselbe erste Polare $P_{n-2}$ hat wie in Bezug auf $P_{n-1}$. Da jeder Punkt von $N_{(n-1)(n-2)}$ als Schnittpunkt mit unendlich vielen solchen Curven $P'_{n-1}$ angesehen werden kann, so sind solche Schnittpunkte für $N_{(n-1)(n-2)}$ nicht singulär, und da sich nicht alle diese Curven $P'_{n-1}$ im betrachteten Punkte berühren, so kann auch nicht jede von ihnen in diesem Punkte mit der Curve $N_{(n-2)(n-3)}$ eine

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Berührung eingehen. (Für jede Curve des durch $P_{n-1}$ und $n-1$ beliebig durch $o$ gelegte Strahlen bestimmten Büschels von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat nämlich der Pol $o$ dieselbe erste Polare wie für die Curve $P_{n-1}$.)

Wir finden also: Es gibt im Allgemeinen $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$ durch $o$ gehende Geraden $D$, für welche die Involution $J_n^1$ eine Gruppe mit zwei Doppelelementen besitzt.

Da wir gezeigt haben, dass die $n-4$ Punkte, welche die beiden Doppelelemente $d_1$ und $d_2$ auf einer solchen Geraden $D$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^1$ auf dieser Geraden ergänzen, Doppelpunkte für die Satellitcurve sind, so können wir den Satz ansprechen:

9. Die Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ besitzt

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2}$$

Doppelpunkte, welche zu je $n-4$ auf $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$ durch $o$ laufenden Geraden liegen.

Die von uns gefundenen $(n-1)(n-2)(n-3)$ Spitzen und $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2}$-Doppelpunkte sind die einzigen vielfachen Punkte, welche die Satellitcurve besitzt.

Wir haben nämlich gesehen, dass, wenn eine Gerade $G$ die Satellitcurve in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, die dieser Geraden zugeordnete Curve $C^{n-1}(o, G)$ entweder einen Doppelpunkt besitzt, oder eine Wendetangente, oder eine Doppeltangente durch $o$ schickt. Wir haben ferner gezeigt, dass die beiden letzten Fälle dann und nur dann eintreten, wenn die Gerade $G$ durch einen der von uns gefundenen Rückkehr- oder Doppelpunkte hindurchgeht und es wird also nur noch zu zeigen sein, dass es nicht geschehen kann, dass einer jeden durch einen Punkt $a$ der Satellitcurve gehenden Geraden $G$ eine Curve $C^{n-1}(o, G)$ mit einem auf $oa$ gelegenen Doppelpunkt $d$ zugeordnet ist. Beim Beweise des Satzes (8) haben wir aber gesehen, dass nicht zweien durch einen Punkt $a$ gehenden Geraden Curven zugeordnet sein können, die in demselben Punkt $d$ von $oa$ einen Doppelpunkt besitzen, wenn $a$ von $d$

verschieden sein soll; fiele aber $a$ mit $d$ zusammen, so hätte die aus $G$ und $C^{n-1}(o, G)$ zusammengesetzte Curve in $a$ einen dreifachen Punkt und die erste Polare in Bezug auf diese zusammengesetzte Curve würde also im Punkte $a$ einen Doppelpunkt besitzen.

Nun war gezeigt, dass diese Polare mit jener in Bezug auf die Grundcurve $C_n$ identisch ist und sie kann daher keine vielfachen Punkte besitzen, weil $C_n$ eine allgemeine Curve ist und weil wir den Punkt $o$ als beliebigen (nicht auf der Steiner'schen Curve von $C_n$ gelegenen) Punkt voraussetzen.

Da wir die Anzahl der Doppelpunkte und Spitzen der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ kennen, so können wir mittelst der Plücker'schen Formen die übrigen Charaktere dieser Curve finden.

Wir erhalten das Resultat:

10. Die Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ ist von der Classe

$$(n-1)(n-2)^2,$$

die Anzahl ihrer Wendetangenten beträgt

$$4(n-1)(n-2)(n-3),$$

die Anzahl ihrer Doppeltangenten

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n^3-4n^2+6n-14)}{2}.$$

Die von $o$ aus an die Satellitcurve gehenden $(n-1)(n-2)^2$ Tangenten lassen sich leicht angeben. Es sind dies: 1. die $(n-1)(n-2)$ Geraden $W$, für welche die Involution eine Gruppe mit einem dreifachen Element $w$ besitzt und zwar sind diese Strahlen einfache Tangenten und $w$ ihr Berührungspunkt, und 2. die $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$ doppelt zu zählenden Geraden $D$, für welche die Involution $J_n^1$ eine Gruppe mit zwei verschiedenen Doppelelementen $d_1$, $d_2$ besitzt und zwar sind diese Geraden Doppeltangenten und $d_1$ und $d_2$ ihre Berührungspunkte. Denn man erhält die Schnittpunkte der Satellitcurve mit einer beliebig durch $o$ gelegten Transversale $T$, indem man zu jedem der doppelt genommenen $n-1$ Schnittpunkte von $T$ mit der ersten Polare des Punktes $o$ bezüglich der Grundcurve die $n-2$ Punkte

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

construirt, welche ihn zu einer Gruppe der Involution $J_n^1$ auf $T$ ergänzen. Führt man diese Construction für die Geraden $W$, respective $D$ aus und beachtet, dass in $w$ zwei Schnittpunkte von $W$ mit der ersten Polare vereinigt liegen, respective dass $d_1$ und $d_2$ beide der ersten Polare angehören, so ergibt sich, dass zwei von den Schnittpunkten von $W$ mit der Satellitcurve in $w$ zusammenfallen, respective dass die Gerade $D$ die Satellitcurve in jedem der Punkte $d_1$ und $d_2$ zweimal schneidet. Da weder ein Punkt $w$ noch ein Punkt $d_1$, $d_2$ vielfacher Punkt der Satellitcurve ist, so erscheint die vorangestellte Behauptung bewiesen.

Die doppelt gezählten $(n-1)(n-2)$ Punkte $w$ bilden mit den einfach gezählten $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$ Punktepaaren $d_1$, $d_2$ zusammen die sämmtlichen $(n-1)^2(n-2)$ Schnittpunkte der ersten Polare $P_{n-1}$ des Punktes $o$ der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ und wir können unsere Resultate in dem Satze zusammenfassen:

11. Die Schnittpunkte der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ mit der ersten Polare $P_{n-1}$ zerfallen in zwei Gruppen: 1. eine Gruppe von $(n-1)(n-2)$ Berührungspunkten, welche aus $P_{n-1}$ durch die zweite Polare des Punktes $o$ ausgeschnitten werden und 2. eine Gruppe von einfachen Schnittpunkten, welche die Curve $N_{(n-1)(n-2)}$ aus der ersten Polare ausschneidet.

Die gemeinschaftlichen Tangenten von $P_{n-1}$ und $S_{(n-1)(n-2)}$ in den Punkten der ersten Gruppe laufen durch $o$ und jede derselben enthält $n-3$ Spitzen der Satellitcurve. Die Schnittpunkte der zweiten Gruppe ordnen sich in Paare, deren Verbindungslinien durch $o$ laufen, die Satellitcurve in beiden Punkten des Paares berühren und $n-4$ Doppelpunkte dieser Curve enthalten.

Wir wollen unsere allgemeinen Sätze auf den Fall anwenden, dass die Grundcurve $C_n$ von der dritten oder vierten Ordnung ist.

Legen wir eine $C_3$ zu Grunde, so schneiden die sechs von einem beliebigen Punkte der Ebene $o$ an $C_3$ gehenden Tangenten diese Curve noch in sechs Punkten, welche auf einem Kegelschnitte, nämlich dem Satellitkegelschnitte $S_2$ des Punktes $o$

liegen (3), der den Polarkegelschnitt $P_2$ dieses Punktes, in seinen Schnittpunkten mit der ersten Polare berührt [1] (11). Projicirt man die drei Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $G$ mit der Curve $C_3$ aus $o$, so schneiden die drei Projectionsstrahlen die Curve $C_3$ noch in weiteren sechs Punkten, welche auf dem der Geraden $G$ zugeordneten Kegelschnitt $C^2(o, G)$ liegen, und wenn dieser Kegelschnitt einen Doppelpunkt besitzt, d. h. wenn er in zwei Geraden $G_1$ und $G_2$ verfällt, so ist $G$ eine Tangente des Satellitkegelschnittes $S_2$ (7). Aus der Construction des zugeordneten Kegelschnitts ist sofort ersichtlich, dass jeder der drei Geraden $G$, $G_1$, $G_2$ die aus den beiden anderen zusammengesetzte Curve zweiter Ordnung zugeordnet ist. Es werden sich also die Tangenten des Satellitkegelschnittes in Tripel $G$, $G_1$, $G_2$ einer Involution anordnen und der Polarkegelschnitt $P_2$ wird das Erzeugnisse dieser Involution sein, da jedes solche Tangententripel für den Pol $o$ dieselbe erste Polare besitzt, wie die Grundcurve (indem dies ja stets für die aus einer Geraden und der ihr zugeordneten Curve zusammengesetzte Curve der Fall ist). Da die Kegelschnitte $P_2$ und $S_2$ sich in ihren Schnittpunkten mit der geraden Polare des Punktes $o$ doppelt berühren, so werden für die Tangenteninvolution auf $S_2$, deren Erzeugniss $P_2$ ist, die von $o$ ausgehenden Tangenten dreifache Elemente sein.

Da die Ecken der Dreiecke $G$, $G_1$, $G_2$ wiederum auf $P_2$ eine Involution bestimmen, als deren Erzeugniss man $S_2$ ansehen kann, so können wir unser Resultat auch so aussprechen:

12. Der Satellitkegelschnitt eines Punktes $o$ in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung $C_3$, welcher durch die sechs Punkte geht, in denen die sechs von $o$ an $C_3$ gehenden Tangenten diese Curve noch schneiden, ist das Erzeugniss der kubischen Involution (cyklischen Projectivität) auf dem Polarkegelschnitte $P_2$ des Punktes $o$, welcher die beiden Schnittpunkte von $P_2$ mit der geraden Polare von $o$ als dreifache Elemente (Doppelpunkte) enthält.

Im Falle die Grundcurve von der vierten Ordnung ist, wollen wir unsere Sätze zunächst insofern präcisiren, als wir die Curve

[1] Cf. Salmon-Fiedler, Cremona, Sturm a. a. O.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$N_{(n-1)(n-2)}$ des allgemeinen Falles näher untersuchen. Für $n=4$ ist diese Curve ein Kegelschnitt $N_2$, welcher erzeugt wird, wenn man auf jeder durch den Pol $o$ gehenden Transversale $T$ die aus zwei Doppelelementen $d_1$, $d_2$ bestehende Gruppe der Involution $J_4^2$ construirt, deren dreifache Elemente auf dem Polarkegelschnitt $P_2$ des Pols $o$ liegen.

Ist speciell $T$ eine von $o$ aus an $N_2$ gelegte Tangente, so fallen die Punkte $d_1$ und $d_2$ zusammen, die Involution $J_4^2$ hat ein vierfaches Element im Berührungspunkte, in welchem auch die zwei dreifachen Elemente dieser Involution vereinigt liegen, d. h. der Polarkegelschnitt $P_2$ wird in seinen Schnittpunkten mit der Polargeraden vom Kegelschnitt $N_2$ doppelt berührt.

Von den sechs Schnittpunkten von $N_2$ mit $P_1$ wissen wir (11), dass sie paarweise auf drei durch $o$ gehenden Geraden $D$ liegen. Die drei nicht auf $N_2$ gelegenen Punkte, welche das Tripel der Geraden $D$ noch mit der Curve $P_3$ gemein hat, müssen daher nach einem bekannten Satze auf einer Geraden $G$ liegen, so dass der Kegelschnitt $N_2$ die dieser Geraden $G$ bezüglich des Pols $o$ zugeordnete Curve ist, wenn $P_3$ als Grundcurve angesehen wird. Die Gerade $G$ mit dem Kegelschnitte $N_2$ zusammen, müssen also als Curve dritter Ordnung aufgefasst, für den Pol $o$ denselben Polarkegelschnitt $P_2$ haben, wie die Curve $P_3$, es müssen daher die Doppelpunkte dieser zusammengesetzten Curve, d. h. die Schnittpunkte von $G$ mit $N_2$ auf dem Polarkegelschnitt $P_2$ liegen. Da aber die Kegelschnitte $N_2$ und $P_2$ nur ihre Schnittpunkte mit der Polargeraden $P_1$ gemein haben, in denen sie sich doppelt berühren, so folgt, dass die Gerade $G$ mit der geraden Polare $P_1$ des Pols $o$ identisch ist. Demnach sind die Geraden $D$ nichts Anderes, als jene Strahlen, welche die Schnittpunkte der kubischen und geraden Polare aus dem Pol $o$ projiciren, und $N_2$ ist jener Kegelschnitt, welcher durch die sechs weiteren Schnittpunkte dieser drei projicirenden Strahlen mit der kubischen Polare $P_3$ hindurchgeht. Diesen Kegelschnitt hat Herr Sturm die Nebenpolare des Pols $o$ (bezogen auf $P_3$ als Grundcurve) genannt.[1]

Unsere allgemeinen Resultate nehmen für den Fall $n=4$ die Form an:

---

[1] Journal für Mathematik, Bd. 88, pag. 228.

13. Die 24 Punkte, in welchen die 12 von einem beliebigen Punkte $o$ der Ebene an eine $C_4$ gehenden Tangenten, diese Curve noch treffen, liegen auf einer Curve sechster Ordnung $S_6$ mit sechs Spitzen. Vom Punkte $o$ aus gehen an die Curve $S_6$, welche von der zwölften Classe ist, 1. sechs einfache Tangenten, welche mit den von $o$ aus an die erste Polare $P_3$ dieses Punktes bezüglich der $C_4$ gehenden sechs Tangenten identisch sind, und welche auch dieselben Berührungspunkte haben, wie diese. Auf diesen sechs Tangenten liegen einzeln die sechs Spitzen von $S_6$. 2. gehen von $o$ aus an diese Curve drei Doppeltangenten und zwar sind dies die Strahlen, welche die drei Schnittpunkte der kubischen Polare $P_3$ mit der geraden Polare $P_1$ des Pols $o$ aus diesem Punkte projiciren. Jeder solche Strahl berührt $S_6$ in den beiden weiteren Punkten, die er mit $P_3$ gemein hat. (11.) Die sechs Schnittpunkte von $S_6$ mit einer beliebigen Geraden sind in derselben Lagenbeziehung, wie die Schnittpunkte derselben mit einer allgemeinen Curve dritter Classe (6).

Über die Lage der Spitzen der Satellitcurve $S_6$ können wir noch etwas Näheres angeben.

Ist $W$ eine der von $o$ aus an die erste Polare $P_3$ gehenden Tangenten, $w$ deren Berührungspunkt, so ist $w$ ein dreifaches Element der auf $W$ bestimmten Involution $J_4^1$ und der Punkt $s$, welcher den dreifachen Punkt $w$ zu einer Gruppe dieser Involution ergänzt, ist eine Spitze der Satellitcurve $S_6$. Da nun alle Gruppen der Involution $J_4^1$ auch der Involution zweiter Stufe $J_4^2$ angehören, so wird diejenige Curve $S'$, welche entsteht, wenn wir auf jeder durch $o$ hindurchgelegten Transversale $T$ die beiden Punkte verzeichnen, welche die beiden dreifachen Elemente der Involution $J_4^2$ (Schnittpunkte von $T$ mit dem Polarkegelschnitt $P_2$) zu je einer Gruppe dieser Involution ergänzen, durch die Spitzen der Satellitcurve $S_6$ hindurchgehen.[1]

---

[1] Gerade so wie wir die Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ definirt haben als Ort der Punkte, welche auf einer beliebig durch $o$ gelegten Transversale $T$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wir wollen nun zeigen, dass die Curve $S'$ ein Kegelschnitt ist, welcher den Polarkegelschnitt $P_2$ des Pols $o$ bezüglich der Curve $C_4$ in den Schnittpunkten desselben mit der Polargeraden $P_1$ dieses Punktes doppelt berührt.

Was zunächst die Berührung von $S'$ mit $P_2$ anlangt, so erkennt man dieselbe sofort, wenn man die Transversale $T$ mit einen der beiden von $o$ aus an den Polarkegelschnitt $P_2$ gehenden Tangenten zusammenfallen lässt. Im Berührungspunkte $v$ dieser Tangente liegen nämlich die zwei dreifachen Elemente der Involution $J_4^2$ auf $T$ vereinigt, dieser Punkt ist daher ein vierfaches Element dieser Involution, und es fallen also die beiden Punkte von $S'$ auf dieser Tangente, welche die beiden dreifach gezählten in $v$ vereinigt liegenden Punkte zu Gruppen der Involution $J_4^2$ ergänzen mit $v$ zusammen.

Um die Ordnung von $S'$ zu bestimmen, construiren wir die Schnittpunkte von $S'$ mit einer beliebigen Geraden $G$ nach einer schon wiederholt angewendeten Methode.

Eine beliebige, durch $o$ hindurchgelegte Transversale $T$ schneidet die Gerade $G$ in einem Punkte $a$ und die Systeme von je 3 Punkten, welche den Punkt $a$ zu je einer Gruppe der Involution $J_4^2$ ergänzen, bilden eine Involution dritten Grades erster Stufe $(J)_3^1$, deren Doppelelemente wir auf $T$ verzeichnen wollen. Es mögen diese Doppelelemente, wenn $T$ um $o$ rotirt,

---

die Doppelelemente der Involution $J_n^1$ zu Gruppen derselben ergänzen, so kann man allgemeiner nach jener Curve fragen, welche entsteht, wenn man die Involution $n^{\text{ter}}$ Stufe $J_n^r$ betrachtet (welche von allen Gruppen auf $T$ gebildet wird, die für den Pol $o$ dieselben harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n-r$ haben, wie das System der Schnittpunkte von $T$ mit der Grundcurve $C_n$) und wenn man die $(r+1)$-fachen Elemente von $J_n^r$ zu Gruppen dieser Involution ergänzt. Man erhält so eine Curve von der Ordnung $(n-r)(n-r-1)$, deren Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden $G$ durch das System der Tangenten ausgeschnitten werden, welche von $o$ aus an die $(r-1)^{\text{te}}$ Polare dieses Punktes in Bezug auf die Curve $C^{n-1}$ $(o, G)$ gehen. Es lässt sich auch zeigen, dass die erzeugte Curve $(n-r)(n-r-1)(n-r-2)$ Spitzen und $\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)(n-r-3)}{2}$ Doppelpunkte besitzt, und zwar liegen die Spitzen zu je $n-r-2$ auf den $(n-r)(n-r-1)$ Tangenten, welche von $o$ aus an die $r^{\text{te}}$ Polare dieses Punktes bezüglich der Fundamentalcurve $C_n$ gehen.

die Curve $C'$ erfüllen. Dann folgt aus der Erzeugungsart von $S'$, dass die Schnittpunkte dieser Curve mit der Geraden $G$ durch die Tangenten ausgeschnitten werden, welche von $o$ aus an $C'$ gehen. In den Berührungspunkt einer solchen Tangente fallen nämlich zwei Doppelelemente der Involution $(J)_3^1$, also ein dreifaches Element dieser Involution, so dass der dreifache Berührungspunkt durch den Schnittpunkt $a$ der Tangente mit der Geraden $G$ zu einer Gruppe der Involution $J_4^2$ ergänzt wird.

Nun können wir aber von der Involution $(J)_3^1$ auf einer beliebigen Transversale $T$ stets zwei Gruppen angeben, durch welche sie definirt ist, nämlich den $n$-fachen Punkt $o$, welcher der Definition der Involution $J_4^2$ zufolge mit jedem Punkte von $T$, also auch mit dem Schnittpunkt $a$ eine Gruppe bildet, und das System der Schnittpunkte von $T$ mit der Curve $C^3$ $(o, G)$, welches mit $a$ zusammen eine Gruppe der in $J_4^2$ enthaltenen Involution $J_4^1$ ausmacht. Daraus schliessen wir wieder, dass die beiden Punkte von $C'$ auf $T$ nichts Anderes sind als die harmonischen Mittelpunkte zweiten Grades des Pols $o$ in Bezug auf das System der Schnittpunkte mit $C^3$ $(o, G)$, so dass die Curve $C'$ der Polarkegelschnitt des Punktes $o$ bezüglich der Curve $C^3$ $(o, G)$ ist. Es gehen daher von $o$ aus an $C'$ zwei Tangenten und die Curve $S'$ ist von der zweiten Ordnung.

Wir haben somit das Resultat:

14. Die sechs Spitzen der Satellitcurve $S_6$ des Pols $o$ bezüglich einer Curve vierter Ordnung $C_4$ liegen auf einem Kegelschnitt $S_2'$, welcher den Polarkegelschnitt $P_2$ des Pols $o$ bezüglich der $C_4$ in seinen Schnittpunkten mit der Polargeraden $P_1$ dieses Punktes berührt.

Salmon hat eine Methode für die Bildung der Gleichung $\varphi=0$ einer Curve $(n-1)(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung angegeben, welche die Eigenschaft (3) mit der Satellitcurve gemein hat, d. h. einer Curve, welche durch die $n(n-1)(n-2)$ Punkte hindurchgeht, in welchen an die Grundcurve $C_n$, deren Gleichung $U(x_1, x_2, x_3)=0$ sein mag, gehenden $n(n-1)$ Tangenten diese Curve noch schneiden und wir wollen nun zeigen, dass diese Curve $\varphi=0$ mit der hier betrachteten Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ identisch ist.[1]

[1] Salmon-Fiedler, Höhere Curven, Art. 79 der ersten Auflage.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Salmon erhält die in Rede stehende Curvengleichung, indem er die Discriminante des Ausdruckes

$$\mu^{n-1}\lambda\Delta + \mu^{n-2}\lambda^2\Delta^2 + \mu^{n-3}\lambda^3\Delta^3 + .$$

gleich Null setzt. Dabei bedeuten

$$\Delta,\ \Delta^2,\ \Delta^3,$$

die erste, zweite, dritte Polare des Punktes $o$ $(x_1', x_2', x_3')$ bezüglich der Fundamentalcurve $U(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Aus der Form des obigen Ausdruckes ist ersichtlich, dass die Discriminante $\varphi$ ungeändert bleibt, wenn man für die Curve $U=0$ eine andere Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung substituirt, für welche die erste Polare des Punktes $o$ $\Delta = 0$ dieselbe ist, da dann die übrigen Polaren $\Delta^2$, $\Delta^3$, von selbst unverändert bleiben. Es bildet aber, wie wir gezeigt haben, eine beliebige Gerade $G$ mit der ihr angeordneten Curve $C^{n-1}$ $(o, G)$ zusammen eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche für den Pol $o$ dieselbe erste Polare hat, wie die Fundamentalcurve $C_n$.

Ersetzt man die Curve $C_n$ durch diese zusammengesetzte Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, so folgt aus der (von Salmon bewiesenen) Fundamentaleigenschaft (3) der Curve $\varphi = 0$, dass dieselbe von der Geraden $G$ in jenen Punkten getroffen wird, welche die $(n-1)$. $(n-2)$ von $o$ aus an $C^{n-1}$ $(o, G)$ gehenden Tangenden aus $G$ ausscheiden, so dass nach Satz (5) $\varphi = 0$ die Gleichung der Satellitcurve $S_{(n-1)(n-2)}$ ist. [1]

---

[1] Dieses Resultat lässt sich dahin verallgemeinern, dass die Discriminante des Ausdrucks:

$$\mu^{n-r}\lambda^r\Delta^r + \mu^{n-r-1}\lambda^{r+1}\Delta^{r+1} + \ldots$$

die Gleichung derjenigen Curve ist, welche man erhält, wenn man auf jeder durch $o$ hindurchgehenden Transversale $T$, diejenigen singulären Punkte der auf $T$ bestimmten Involution $J_n^r$ verzeichnet, welche $r$-fach gezählt, eine Gruppe bestimmen, die noch ein Doppelelement besitzt. Über die Bedeutung der Inv. $J_n^r$ siehe meine Noten (Sitzb. d. k. Akad. Juliheft 1883). In Bezug auf diese Note mag hier bemerkt werden, dass Herr Le Paige (Čas. p. pěst. math. 1881) den (von Poncelet für $r=1$ gegebenen) Satz bewiesen hat, dass die $(n-r)^{\text{ten}}$ Polargruppen eines Punktes $o$ bezüglich zweier $n$-punktiger Gruppen dann, und nur dann zusammenfallen, wenn die durch die beiden Gruppen bestimmte Involution in $o$ einen $(r+1)$-fachen Punkt hat. Diese Curve ist von der $(n-r)(n-r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und besitzt $(n-r)$ $(n-r-1)$ $(n-r-2)$ Spitzen und $\frac{1}{2}(n-r)$ $(n-r-1)$ $(n-r-2)$ $(n-r-3)$ Doppelpunkte. Für $r=2$ ist es die von uns betrachtete Curve $N_{(n-1)(n-2)}$.

## II.

Wir gehen jetzt dazu über diejenigen Untersuchungen für Flächen durchzuführen, welche den im ersten Theile dieser Abhandlung für Plancurven angestellten analog sind. Die Methode der Untersuchung bleibt ganz dieselbe und wir führen desshalb hier nur jene Betrachtungen aus, welche bei Plancurven noch nicht ihre entsprechenden haben.

Wir definiren die Satellitfläche durch ihre Erzeugung. Ist $o$ ein beliebiger Punkt des Raumes, $F_n$ eine beliebige Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist wieder auf jeder durch den Punkt $o$ gelegten Transversale $T$ durch den $n$-fachen Punkt $o$ als eine und das System der $n$-Schnittpunkte von $T$ mit $F_n$ als zweite Gruppe eine Involution $J_n^1$ bestimmt. Die Satellitfläche $S_{(n-1)(n-2)}$ des Pols $o$ bezüglich der Fundamentalfläche $F_n$ soll nun als Ort der $(n-1)(n-2)$ Punkte auf der beweglichen Transversale $T$ definirt werden, welche die doppelten Schnittpunkte von $T$ mit der ersten Polare $P_{n-1}$ des Pols $o$ in Bezug auf $F_n$ zu Gruppen der Involution $J_n^1$ auf $T$ ergänzen.

Dieselbe Fläche $S_{(n-1)(n-2)}$ erhalten wir auch, wenn wir in einer beweglichen, durch $o$ gelegten Ebene, welche die Fläche $F_n$ in der Curve $C_n$ schneiden mag, die Satellitfläche des Pols $o$ in Bezug auf die Curve $C_n$ construiren.

Die für Satellitcurve aufgestellten Sätze (2), (3), (8), (9), (11) führen sofort zu dem Resultate:

Der von einem beliebigen Punkte $o$ des Raumes an eine allgemeine Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung $F_n$ gehende Tangentenkegel vom Grade $n(n-1)$ berührt diese Fläche längs einer Curve $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, der Durchdringungscurve von $F_n$ mit der ersten Polare $P_{n-1}$ des Pols $o$, und schneidet die Fläche $F_n$ noch in einer Curve $n(n-1)(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, der Durchdringungscurve von $F_n$ mit der Satellitfläche $S_{(n-1)(n-2)}$ des Pols $o$.

Die Satellitfläche $S_{(n-1)(n-2)}$ besitzt eine Rückkehrkante $R$ von der Ordnung $(n-1)(n-2)(n-3)$, welche vom Punkte $o$ aus durch einen Kegel $W_{(n-1)(n-2)}$ projicirt wird, dessen Erzeugenden $(n-3)$-fache

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Secanten der Rückkehrkante sind. Dieser Kegel $W_{(n-1)(n-2)}$ ist nichts Anderes als der von $o$ aus an die erste Polare $P_{n-1}$ gehende Tangentenkegel, und längs seiner Berührungscurve berühren sich auch die Flächen $P_{n-1}$ und $S_{(n-1)(n-2)}$.

Die Satellitfläche $S_{(n-1)(n-2)}$ besitzt ferner eine Doppelcurve $\Delta$ von der Ordnung $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2}$ welche von $o$ aus durch einen Kegel $D_{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}}$ projicirt wird, dessen Erzeugende $(n-4)$-fache Secanten dieser Doppelcurve sind. Überdies sind diese Erzeugenden Doppeltangenten für die Satellitfläche und deren Berührungspunkte bilden den einfach zu zählenden Theil der Durchdringungscurve der Flächen $P_{n-1}$ und $S_{(n-1)(n-2)}$.

Die Curve, welche die Satellitfläche mit einer beliebigen, nicht durch $o$ gehenden Ebene $E$ gemein hat, erhält man als Schnittcurve diese Ebene, mit dem von $o$ aus an die Fläche $F^{n-1}(o, E)$ gehenden Tangentenkegel. Die Fläche $F^{n-1}(o, E)$ ist der Ort der $n-1$ Punkte auf einer beweglichen durch $o$ gelegten Transversale $T$, welche den Schnittpunkt von $T$ mit der Ebene $E$ zu einer Gruppe der auf $T$ bestimmten Involution $J_n^1$ ergänzen. Daraus ziehen wir das folgende Resultat, welches wir weiter unten zur Bestimmung der vielfachen Punkte der Curven $R$ und $\Delta$ benutzen: Die Schnittpunkte der Rückkehrkante $R$ mit einer beliebigen Ebene $E$ werden aus derselben durch die von $o$ aus an die Fläche $F^{n-1}(o, E)$ gehenden stationären Tangenten und die Schnittpunkte der Doppelcurve $\Delta$ durch die von $o$ aus an diese Fläche gehenden Doppeltangenten ausgeschnitten.

Aus der Construction der Schnittpunkte der Satellitfläche mit einer beliebig durch $o$ gelegten Transversale $T$ (durch welche wir die Satellitfläche definirt haben) folgt sofort, dass die Verbindungslinie eines doppelten Punktes der Satellitfläche $a$ mit dem Punkt $o$ eine Gerade sein muss, für welche die Involution $J_n^1$ den besonderen Charakter hat, dass zwei ihrer Doppelelemente (Schnittpunkte mit $P_{n-1}$) derselben Gruppe von $J_n^1$ angehören und zwar wissen wir, dass $a$ ein Punkt der Rückkehrcurve $R$ oder

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at


der Doppelcurve $\Delta$ ist, je nachdem diese zwei Doppelelemente vereinigt oder getrennt liegen.

Ganz ebenso muss die Verbindungslinie eines dreifachen Punktes von $S_{(n-1)(n-2)}$ mit dem Punkt $o$ eine Gerade sein, für welche drei Doppelelemente von $J_n^1$ derselben Gruppe dieser Involution angehören. Je nachdem diese drei Doppelelemente alle vereinigt oder zwei vereinigt und einer getrennt oder alle getrennt liegen, haben wir:

1. die Geraden $V$, auf welchen die Involution $J_n^1$ ein vierfaches Element $v$ besitzt;

2. die Geraden $\Theta$, auf welchen die Involution $J_n^1$ eine Gruppe mit einem dreifachen Element $D$ und einem Doppelelement $\delta$ besitzt;

3. die Strahlen $U$, auf welchen die Involution $J_n^1$ eine Gruppe mit drei Doppelelementen $u_1$, $u_2$, $u_3$ aufweist.

Da für die Geraden $V$ drei Doppelelemente von $J_n^1$ in den Punkt $v$ hineinfallen, so sind diese Geraden nichts Anderes als die von $o$ aus an die erste Polare gehenden stationären Tangenten, d. h. jene $(n-1)(n-2)(n-3)$ Strahlen, welche die Schnittpunkte der drei ersten Polarflächen des Pols $o$ $P_{n-1}$, $P_{n-2}$, $P_{n-3}$ aus dem Pol projiciren.

Die $n-4$ Punkte, welche den vierfachen Punkt $v$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^1$ auf $V$ ergänzen, sind dreifache Punkte der Satellitfläche und der Berührungskegel in einem solchen Punkte besteht aus einer dreifachen Ebene.

Um dies einzusehen, braucht man bloss die Schnittpunkte einer beliebig durch einen solchen Punkt gelegten Geraden $G$ mit der Satellitfläche zu bestimmen. Dies geschieht, indem man in der Ebene $\overline{oG}$ an die Curve $C^{n-1}$ $(o\ G)$ (für die Schnittcurve der Ebene $\overline{oG}$ mit der Fläche $F_n$ als Grundcurve) die Tangenten legt und diese mit der Geraden $G$ zum Durchschnitt bringt.

Aus der $C^{n-1}$ $(o, G)$ definirenden Erzeugungsart ist ersichtlich, dass $v$ ein Undulationspunkt dieser Curve, $V$ dessen Tangente ist, dass also $V$ drei der $(n-1)(n-2)$ von $o$ aus an $C^{n-1}(o, G)$ gehenden Tangenten absorbirt, womit bewiesen ist, dass der betrachtete Punkt für die Satellitfläche ein dreifacher Punkt ist.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Um den zweiten Theil unserer Behauptung zu beweisen, brauchen wir bloss zu beachten, dass es nach den Auseinandersetzungen auf pag. 150 u. 151 in der ganz beliebig durch $V$ gelegten Ebene $\overline{oG}$ nur eine Gerade $G_1$ geben wird, welche durch den betrachteten dreifachen Punkt der Satellitfläche hindurchgeht, und welcher eine Curve $C^{n-1}$ $(o, G_1)$ mit einen Doppelpunkt in $v$ angeordnet ist, d. h. es wird in einer beliebig durch $V$ gelegten Ebene nur eine Gerade liegen, welche in dem betrachteten dreifachen Punkt der Satellitfläche, vier unendlich nahe Punkte mit dieser Fläche gemein hat.

Durch jeden der von uns jetzt gefundenen dreifachen Punkte geht die Rückkehrcurve $R$ zweimal, die Doppelcurve $\Delta$ einmal hindurch, indem einer beliebig durch einen solchen Punkt hindurchgelegten Ebene $E$ eine Fläche $F^{n-1}$ $(o, E)$ zugeordnet ist, welche mit dem Strahle $V$ im Punkte $v$ eine Berührung dritter Ordnung hat, so dass dieser Strahl zwei von $o$ aus an diese Fläche gehende stationäre Tangenten und eine Doppeltangente absorbirt. (Was den Punkt $v$ anlangt, so lässt sich zeigen, dass er ein einfacher Punkt der Rückkehrcurve und $V$ seine Tangente ist, und dass die Berührungsebene der Satellitfläche in diesem Punkte mit jener der ersten Polare $P_{n-1}$ übereinstimmt.)

Durch Betrachtung der Geraden $V$ sind wir demnach zu folgendem Ergebniss geführt:

Die Satellitfläche $S_{(n-1)(n-2)}$ des Pols $o$ besitzt

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

dreifache Punkte, deren Berührungskegel eine dreifache Ebene ist. Diese Punkte liegen zu je $n-4$ auf den $(n-1)(n-2)(n-3)$ stationären Tangenten, die von $o$ aus an die erste Polare $P_{n-1}$ gehen und es geht durch jeden derselben die Rückkehrkante der Satellitfläche zweimal, die Doppelcurve einmal hindurch.

Um die Anzahl der Strahlen $\Theta$ und $U$ zu bestimmen, müssen wir hier eine kleine Hilfsbetrachtung einschieben.

Auf jeder durch $o$ gelegte Transversale $T$ ist eine Involution zweiter Stufe $J_n^2$ bestimmt, als Gesammtheit aller Gruppen auf dieser Transversale, welche für den Pol $o$ dieselben harmonischen

Mittelpunkte vom Grade $n-2$ besitzen, wie das System der Schnittpunkte von $T$ mit der Fundamentalfläche $F_n$. Verzeichnet man auf jeder Transversale $T$ jedes Paar von Punkten, welche doppelt gezählt derselben Gruppe von $J_n^2$ auf $T$ angehören, so erhält man als Ort dieser Punktepaare eine Fläche $(n-2)(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $N_{(n-2)(n-3)}$. Die Schnittcurve dieser Fläche mit einer beliebigen Ebene $E$ erhält man, wenn man den von o aus an die Fläche $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $F^{n-2}(o, E^2)$ gehenden Tangentenkegel mit dieser Ebene zum Durchschnitt bringt. (Cf. pag. 10 u. 11). (Dabei ist $F^{n-2}(o, E^2)$ der Ort derjenigen Punkte auf einer beweglichen durch $o$ gelegten Transversale $T$, welche den doppelten Schnittpunkt von $T$ mit der Ebene $E$ zu einer Gruppe der Involution $J_n^2$ auf $T$ ergänzt.) Dieser Tangentenkegel $(n-1)$. $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt bekanntlich $(n-2)(n-3)(n-4)$ Rückkehrkanten, dies sind die von $o$ aus an die Fläche $F^{n-2}(o, E^2)$ gehenden stationären Tangenten, und $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2}$ Doppelkanten, dies sind die von $o$ aus an die Fläche $F^{n-2}(o, E^2)$ gehenden Doppeltangenten. Man übersieht leicht, dass jeder Schnittpunkt $\delta'$ einer stationären Tangente mit der Ebene $E$, ein Punkt der Rückkehrcurve von $N_{(n-1)(n-2)}$ und jeder Schnittpunkt $u'$ einer Doppeltangente der Doppelcurve dieser Fläche angehört.

Aus der Erzeugungsart der Fläche $F^{n-2}(o, E^2)$ folgt nämlich, dass diese stationären Tangenten nichts Anderes sind, als jene durch $o$ gehenden Geraden $\Theta'$, für welche die Involution $J_n^2$ eine Gruppe mit einem auf $E$ gelegenen Doppelelement $\delta'$ und einem dreifachen Element $\Im'$ besitzt. Es wird also auch für eine beliebige andere durch $\delta'$ gelegte Ebene $E'$ die Fläche $F^{n-2}(o, E'^2)$ den Strahl $\Theta'$ im Punkte $\Im'$ osculiren und die Schnittcurve der Ebene $E'$ mit der Fläche $N_{(n-1)(n-2)}$ wird also eine Spitze im Punkte $\delta'$ besitzen.

Die von $o$ aus an die Fläche $F^{n-2}(o, E^2)$ gehenden Doppeltangenten sind der Erzeugung dieser Fläche zufolge, diejenigen Geraden $U'$, für welche die Involution $J_n^2$ eine Gruppe mit drei Doppelelementen $u_1, u_2, u_3$ besitzt, von denen eines in die Ebene $E$ fällt und ein Schnittpunkt dieser Ebene mit der Doppelcurve von $N_{(n-2)(n-3)}$ ist.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wir finden: Die Fläche $N_{(n-2)(n-3)}$ besitzt eine Rückkehrcurve $R'$ von der Ordnung $(n-2)(n-3)(n-4)$ und eine Doppelcurve $\Delta'$ von der Ordnung $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2}$. Ein beliebiger Punkt $\delta'$ von $R'$ liefert mit $o$ verbunden eine Gerade $\Theta'$, auf welcher die Gruppe der Involution $J_n^2$, welche durch den doppelten Punkt $\delta'$ bestimmt ist, ein dreifaches Element $\mathfrak{S}'$ besitzt, während ein Punkt $u_1'$ von $\Delta'$ mit $o$ verbunden eine Gerade $U'$ liefert, welche die Curve $\Delta'$ noch in zwei Punkten $u_2'$, $u_3'$ trifft, von denen jeder der durch den doppelten Punkt $u_1'$ auf $U'$ bestimmten Gruppe von $J_n^2$ als Doppelelement angehört.

Damit aber die Gerade $\Theta'$, respective $U'$ eine der gesuchten Geraden $\Theta$, respective $U$ sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass der Punkt $\delta'$ von $R'$, respective der Punkt $u_1'$ von $\Delta'$ auf der ersten Polare $P_{n-1}$ angenommen werde. Dies folgt sofort, wenn man beachtet, dass die Gruppen der Involution $J_n^1$ auf einer beliebig durch $o$ gelegten Transversale auch der Involution $J_n^2$ angehören, dass eine Gruppe von $J_n^2$ durch Annahme eines Doppelelements individualisirt ist, und dass die Doppelelemente der Involution $J_n^1$ nichts Anderes sind als die Schnittpunkte der betreffenden Transversale mit der Polarfläche $P_{n-1}$.

Es liefern sonach die $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ Schnittpunkte von $P_{n-1}$ mit der Rückkehrkante $R'$ ebenso viele Geraden $\Theta$, während die $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2}$ Schnittpunkte von $P_{n-1}$ mit der Doppelcurve $\Delta'$ sich in Punktetripel $u_1$, $u_2$, $u_3$ ordnen, deren jedes eine Gerade $U$ liefert, so dass im Ganzen $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$ Strahlen $U$ durch $o$ gehen.

Über die Singularitäten der Satellitfläche, welche auf den Strahlen $\Theta$ und $U$ liegen, gibt dieselbe Betrachtung Aufschluss, welche wir schon bei den Geraden $V$ angewandt haben.

Auf jeder Geraden $\Theta$ sind die $n-5$ Punkte, welche mit dem dreifachen Punkt $\mathfrak{S}$ und dem zweifachen $\delta$ eine Gruppe der Involution $J_n^1$ auf $\Theta$ bilden, für die Satellitfläche dreifache Punkte und der Berührungskegel in jedem derselben zerfällt in eine doppelte und eine einfache Ebene.

Betrachtet man nämlich eine beliebig durch $\Theta$ hindurchgelegte Ebene, welche aus $F_n$ die Curve $C_n$ anschneidet, so wird jeder durch einen der $n-5$ zu untersuchenden Punkte auf $\Theta$ hindurchgehenden Geraden $G$ dieser Ebene eine Curve $C_{n-1}(o, G)$ für $C_n$ als Grundcurve zugeordnet sein, für welche $\Theta$ drei von $o$ ausgehende Tangenten absorbirt, indem dieser Strahl von $C^{n-1}(o, G)$ im Punkte $\mathfrak{I}$ osculirt, im Punkte $\delta$ berührt wird.

Ferner wird es eine einzige Lage von $G$ geben, für welche $C^{n-1}(o, G)$ einen Doppelpunkt in $\mathfrak{I}$, eine einzige Lage, für welche $C^{n-1}(o, G)$ einen Doppelpunkt in $\delta$ besitzt (cf. pag. 8). (In diesen zwei Lagen ist $G$ Tangente der Satellitfläche in dem betrachteten singulären Punkte.)

Ganz ebenso wie oben, zeigt die Construction der Schnittpunkte einer beliebig durch einen der $n-5$ auf $\Theta$ betrachteten Punkte hindurchgelegte Ebene mit der Rückkehrcurve $R$ und der Doppelcurve $\Delta$, dass jeder dieser Punkte ein einfacher Punkt für $R$, ein Doppelpunkt für $\Delta$ ist. (Der Punkt $\Theta$ liegt auf $\Delta$, der Punkt $\delta$ auf $R$, $\Theta$ ist Tangente in beiden.)

Wir finden:

Die Satellitfläche besitzt

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

dreifache Punkte, deren Berührungskegel aus einer einfachen und einer doppelten Ebene besteht. Diese Punkte liegen zu je $n-5$ auf $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ durch $o$ laufenden Geraden $\Theta$ und sind Doppelpunkte für die Doppelcurve $\Delta$, einfache Punkte für die Rückkehrcurve $R$ der Satellitfläche.

Die analoge Betrachtung liefert für die Geraden $U$ (welche die Doppelcurve $\Delta$ in dem Punktetripel $u_1, u_2, u_3$ berühren) das folgende Resultat:

Die Satellitfläche $S_{(n-1)(n-2)}$ besitzt

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{6}$$

dreifache Punkte, deren Berührungskegel in drei einfache Ebenen zerfällt. Diese Punkte liegen zu je

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at



$n-6$ auf $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$ durch $o$ laufenden Geraden $U$ und sind dreifache Punkte für die Doppelcurve $\Delta$ der Satellitfläche.[1]

---

[1] Nichts hindert, die hier angestellten Betrachtungen auf einen Raum von beliebig vielen Dimensionen auszudehnen, ja die Untersuchung der singulären Punkte der Satellitfläche im Raume von $d$ Dimensionen lässt sich sogar einfacher im Raume von $d+1$ Dimensionen durchführen und liefert die Bestimmung der Anzahlen, für die von einem beliebigen Punkte an eine allgemeine Fläche in diesem Raume gehenden singulären Tangenten (cf. pag. 23). Man erhält das folgende allgemeine Resultat:

Die Zahl der von einem beliebigen Punkte eines linearen $(d+1)$ dimensionalen Raumes an eine allgemeine Fläche $F_{n-1}$ $(n-1)^{ter}$ Ordnung (von $d$ Dimensionen) in diesem Raume gehenden singulären Tangenten, welche an $a$ Stellen $\alpha$ unendlich nahe Punkte, an $b$ Stellen $\beta$, ..., an $s$ Stellen $\sigma$ unendlich nahe Punkte mit $F_{n-1}$ gemein haben, beträgt:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-a\alpha-b\beta-\ldots-s\sigma)}{a!\,b!\,.\,.s!}.$$

Nebst der Gleichheit $a(\alpha-1)+b(\beta-1)+\ldots+s(\sigma-1)=d$ (der Bedingung dafür, dass eine endliche Anzahl von jenen singulären Tangenten vorhanden sei) wird bei diesem Satze nur die Ungleichheit der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ vorausgesetzt.

Ist $a(\alpha-1)+b(\beta-1)+\ldots+s(\sigma-1)<d$, so gibt die obige Zahl den Grad des Kegels, der von jenen singulären Tangenten gebildet wird.